Méth. Mat. Phys. - Chapitre 10

Fonctions de Bessel

- **Equation de Helmholtz :** équation d'onde en 3D - champ scalaire

$$\nabla^2\phi(x,y,z) + k^2\phi(x,y,z) = 0 \tag{10.1}$$

- **Relation de dispersion :** espace réciproque temporel (Fourier)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2} \tag{10.2}$$

- **Laplacien :** coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10.3}$$

- **Equation différentielle aux dérivées partielles :** champ scalaire

$$\frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi(x,y,z)}{\partial z^2} + k^2\phi(x,y,z) = 0 \tag{10.4}$$

- **Séparation des variables :** fonctions de variables indépendantes

$$\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z) \tag{10.5}$$

- **Equation différentielle aux dérivées totales :** (10.5) dans (10.4)

$$Y(y)\,Z(x)\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\,Z(x)\,\frac{d^2Y(y)}{dy^2}$$

$$+X(x)\,Y(y)\,\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2X(x)\,Y(y)\,Z(z) = 0 \tag{10.6}$$

- **Equation différentielle :** divisée par $\phi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$

$$\frac{1}{X(x)}\,\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)}\,\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)}\,\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + k^2 = 0 \tag{10.7}$$

- **Système d'équations différentielles ordinaires :** variables indép.

$$X(x) \equiv X_{n_x}(x) \qquad \text{et} \qquad Y(y) \equiv Y_{n_y}(y) \qquad \text{et} \qquad Z(z) \equiv Z_{n_x n_y}(z)$$

$$\frac{1}{X_{n_x}(x)}\,\frac{d^2X_{n_x}(x)}{dx^2} = -\,n_x^2 = \text{cste} \qquad \text{et} \qquad n_x \in \mathbb{Z} \tag{10.8}$$

$$\frac{1}{Y_{n_y}(y)}\,\frac{d^2Y_{n_y}(y)}{dy^2} = -\,n_y^2 = \text{cste} \qquad \text{et} \qquad n_y \in \mathbb{Z} \tag{10.9}$$

$$\frac{1}{Z_{n_x n_y}(z)}\,\frac{d^2Z_{n_x n_y}(z)}{dz^2} = -\,\left(k^2 - n_x^2 - n_y^2\right) \tag{10.10}$$

- **Solutions du système d'équations différentielles ordinaires :**

$$X_{n_x}(x) = X_{n_x}(0)\, e^{\,i n_x x} \tag{10.11}$$

$$Y_{n_y}(y) = Y_{n_y}(0)\, e^{\,i n_y y} \tag{10.12}$$

$$Z_{n_x n_y}(z) = Z_{n_x n_y}(0)\, e^{\,i\sqrt{k^2 - n_x^2 - n_y^2}\; z} \tag{10.13}$$

- **Fonction propres :** champs scalaires $\phi\,(x, y, z) \equiv \phi_{n_x n_y}(x, y, z)$

$$\phi_{n_x n_y}\,(x, y, z) = X_{n_x}(x)\, Y_{n_y}(y)\, Z_{n_x n_y}(z) \tag{10.14}$$

- **Fonction propres :** solution de l'équation de Helmholtz (10.1)

$$\phi\,(x, y, z) = \phi_{n_x n_y}\,(0, 0, 0)\; e^{\,i n_x x}\; e^{\,i n_y y}\; e^{\,i\sqrt{k^2 - n_x^2 - n_y^2}\; z} \tag{10.15}$$

- **Conditions initiales :** fonctions propres

$$\phi_{n_x n_y}\,(0, 0, 0) = X_{n_x}(0)\, Y_{n_y}(0)\, Z_{n_x n_y}(0) \tag{10.16}$$

- **Différentielle :** champ scalaire

$$d\phi\left(\rho,\varphi\right) = \frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\varphi}\, d\varphi \tag{10.17}$$

- **Changement de variable :**

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} = \rho\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \rho\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{10.18}$$

- **Changement de base :**

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}} \qquad \text{et} \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\,\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{10.19}$$

- **Déplacement infinitésimal :** variation du changement de variables

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= d\rho\left(\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}}\right) + \rho\,d\varphi\left(-\,\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{y}}\right) \\ &= d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned} \tag{10.20}$$

- **Différentielle :** champ scalaire : base orthonormée $(\hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\varphi}})$

$$d\phi\left(\rho,\varphi\right) = \left(\frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right)\cdot\left(d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\,d\varphi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\right) \tag{10.21}$$

- **Différentielle :** produit scalaire du gradient et du déplacement

$$d\phi\left(\rho,\varphi\right) = \boldsymbol{\nabla}\,\phi\left(\rho,\varphi\right)\cdot d\boldsymbol{r}\left(\rho,\varphi\right) \tag{10.22}$$

- **Gradient :** champ scalaire : coordonnées polaires

$$\boldsymbol{\nabla}\,\phi\left(\rho,\varphi\right)=\frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\varphi\right)+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\phi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\left(\varphi\right)\tag{10.23}$$

- **Opérateur gradient :** coordonnées polaires

$$\boldsymbol{\nabla}=\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\tag{10.24}$$

- **Dérivées partielles :** vecteurs de base (10.18)

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\rho}=\mathbf{0}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\rho}=\mathbf{0}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\varphi}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi}=-\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\tag{10.25}$$

- **Opérateur laplacien :** coordonnées polaires (carré du gradient)

$$\begin{aligned}\nabla^2&=\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\cdot\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\\&=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\rho}}}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\frac{\partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\\&=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\end{aligned}\tag{10.26}$$

- **Equation de Helmholtz :** coordonnées polaires

$$\nabla^2 \phi(\rho,\varphi) + k^2 \phi(\rho,\varphi) = 0 \qquad (10.28)$$

- **Equation différentielle aux dérivées partielles :** coordonnées polaires

$$\frac{\partial^2 \phi(\rho,\varphi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi(\rho,\varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \phi(\rho,\varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 \phi(\rho,\varphi) = 0 \qquad (10.29)$$

- **Séparation des variables :**

$$\phi(\rho,\varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi) \qquad (10.30)$$

- **Equation différentielle aux dérivées totales :** (10.31)

$$\Phi(\varphi)\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\Phi(\varphi)}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(\rho)\,\Phi(\varphi) = 0$$

- **Equation différentielle :** divisée par $R(\rho)\,\Phi(\varphi)/\rho^2$ (10.32)

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)}\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + k^2\rho^2 + \frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

- **Système d'équations différentielles ordinaires :** variables indép.

$$R(\rho) \equiv R_m(\rho) \qquad \text{et} \qquad \Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi) \qquad \text{où} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2\Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2 = \text{cste} \qquad \text{période} \qquad \varphi \in [\,0, 2\pi\,) \tag{10.33}$$

$$\frac{\rho^2}{R_m(\rho)} \frac{d^2R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + k^2\rho^2 = m^2 = \text{cste} \tag{10.34}$$

- **Fonctions propres angulaires :**

$$\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(0)\, e^{\,im\varphi} \tag{10.35}$$

- **Equation différentielle ordinaire :**

$$\rho^2 \frac{d^2R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + \left(k^2\rho^2 - m^2\right) R_m(\rho) = 0 \tag{10.36}$$

- **Fonctions propres :**

$$\Phi_m(\rho, \varphi) = R_m(\rho)\, \Phi_m(\varphi) \tag{10.37}$$

- **Variable sans dimension :**

$$x = k\rho \tag{10.38}$$

- **Fonction radiale :**

$$K_m(x) = K_m(k\rho) = R_m(\rho) \tag{10.39}$$

- **Equation différentielle radiale :**

$$\rho^2 \frac{d^2 K_m(k\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dK_m(k\rho)}{d\rho} + \left(k^2\rho^2 - m^2\right) K_m(k\rho) = 0 \tag{10.40}$$

- **Opérateur différentiel :** (10.41)

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho}\frac{d}{dx} = k\frac{d}{dx} \qquad \text{ainsi} \qquad \frac{d^2}{d\rho^2} = k\frac{d}{dx}\left(k\frac{d}{dx}\right) = k^2\frac{d^2}{dx^2}$$

- **Equation différentielle de Bessel :** fonction radiale

$$x^2 K_m''(x) + x K_m'(x) + \left(x^2 - m^2\right) K_m(x) = 0 \tag{10.42}$$

- **Fonction propre :** fonction de Bessel de $1^{\text{ère}}$ et 2^{e} espèces (10.43)

$$\phi_m(\rho,\varphi) = K_m(k\rho)\,\Phi_m(\varphi) = \Big(a_m J_m(k\rho) + b_m Y_m(k\rho)\Big)\, e^{im\varphi}$$

- **Equation de Bessel :**

$$p_2(x)\,K''_m(x) + p_1(x)\,K'_m(x) + \left(p_0(x) - \lambda_m\right)K_m(x) = 0 \qquad (10.44)$$

- **Polynômes :** équation de Bessel

$$p_2(x) = x^2 \quad \text{et} \quad p_1(x) = x \quad \text{et} \quad p_0(x) = x^2 \quad \text{et} \quad \lambda_m = m^2 \qquad (10.45)$$

- **Fonction poids :** (10.46)

$$w(x) = \frac{1}{p_2(x)}\exp\left(\int^x \frac{p_1(x')}{p_2(x')}\,dx'\right) = \frac{1}{x^2}\exp\left(\int^x \frac{dx'}{x'}\right) = \frac{1}{x}$$

- **Equation de Bessel :** forme générale de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\Big(w(x)\,p_2(x)\,K'_m(x)\Big) + \left(p_0(x) - \lambda_m\right)w(x)\,K_m(x) = 0 \qquad (10.47)$$

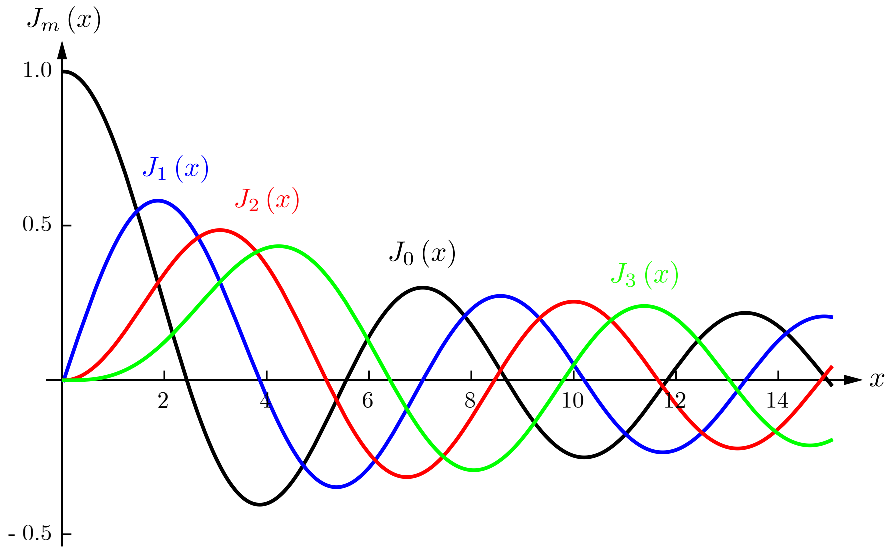
- **Equations différentielles de Bessel :** forme de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\Big(x\,J'_m(x)\Big) + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)J_m(x) = 0 \qquad (10.48)$$

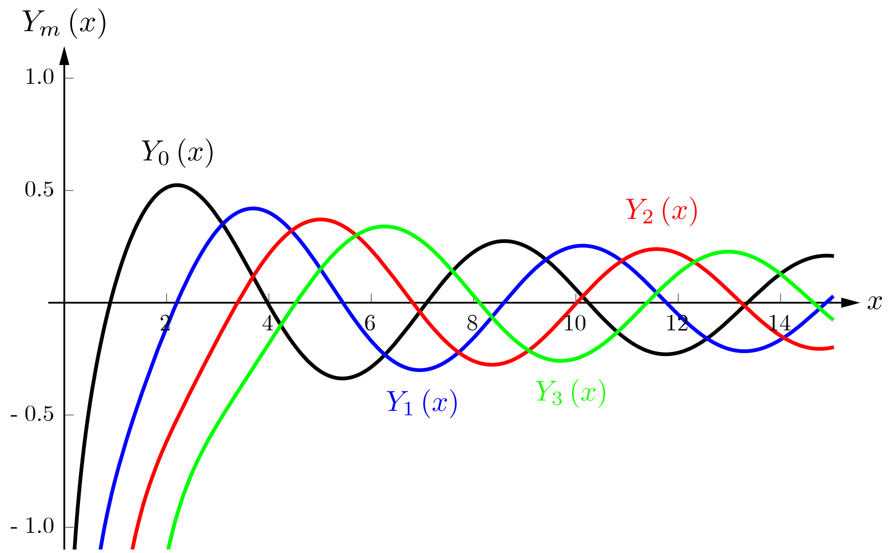
$$\frac{d}{dx}\Big(x\,Y'_m(x)\Big) + \left(x - \frac{m^2}{x}\right)Y_m(x) = 0 \qquad (10.49)$$

- **Fonctions de Bessel :**

  1. **Première espèce :** $J_m(x)$: continue en $x = 0$ (paire ou impaire)



  2. **Deuxième espèce :** $Y_m(x)$: diverge en $x = 0$



- **Equation de Helmholtz :** continue en $x = 0$

$$b_m = 0 \qquad \text{où} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

- **Fonctions propres :** continue en $x = 0$

$$\phi_m(\rho, \varphi) = a_m\, J_m(k\rho)\, e^{\,im\varphi} \tag{10.50}$$

- **Fonctions propres réelles :** coefficients de Fourier réels

$$\phi_m(\rho, \varphi) = \Big(A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)\Big)\, J_m(k\rho) \tag{10.51}$$

où les coefficients A_m et B_m dépendent de la symétrie ou de l'antisymétrie sous parité des fonctions propres $\phi_m(\rho, \varphi)$.

- **Hamiltonien :** particule libre

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(-\,i\hbar\,\boldsymbol{\nabla}\right)\cdot\left(-\,i\hbar\,\boldsymbol{\nabla}\right) = -\,\frac{\hbar^2}{2m}\,\nabla^2 \tag{10.52}$$

- **Equation de Schrödinger stationnaire :** $\psi\left(x,y\right) \in \mathcal{H}$

$$\hat{H}\,\psi\left(x,y\right) = E\,\psi\left(x,y\right) \tag{10.53}$$

- **Equation de Schrödinger stationnaire :** cartésienne

$$-\,\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi\left(x,y\right) = E\,\psi\left(x,y\right) \tag{10.54}$$

- **Equation de Helmholtz :** coordonnées cartésiennes

$$\nabla^2\psi\left(x,y\right) + k^2\psi\left(x,y\right) = 0 \tag{10.55}$$

- **Nombre d'onde :**

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{10.56}$$

- **Equation de Helmholtz :** coordonnées polaires : $\psi\left(\rho,\varphi\right)=\psi\left(x,y\right)$

$$\frac{\partial^2\psi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\psi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2\psi\left(\rho,\varphi\right)}{\partial\varphi^2}+k^2\psi\left(\rho,\varphi\right)=0 \qquad (10.57)$$

- **Fonction d'onde :** $\psi\left(\rho,\varphi\right)\equiv\psi_m\left(\rho,\varphi\right)$ continue en $x=0$: $b_m=0$

$$\psi_m\left(\rho,\varphi\right)=a_m\,J_m\left(k\rho\right)e^{\,im\varphi} \qquad (10.58)$$

- **Condition de confinement :** fonction d'onde : disque de rayon r

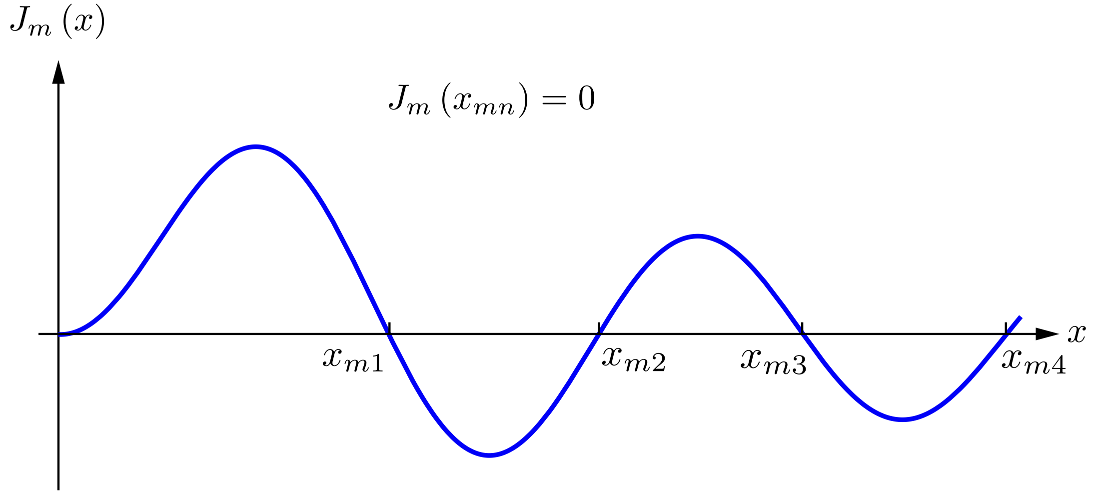
$$\psi_m\left(\rho,\varphi\right)=0 \qquad \text{si} \qquad \rho\geqslant r \qquad (10.59)$$

- **Condition de la fonction d'onde :** (10.58) et (10.59) en $\rho=r$

$$\psi_m\left(r,\varphi\right)=a_m\,J_m\left(kr\right)e^{\,im\varphi}=0 \qquad (10.60)$$

- **Zéros des fonctions de Bessel :** x_{mn} où $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\equiv k_{mn}$

$$J_m\left(x_{mn}\right)=J_m\left(k_{mn}\,r\right)=0 \qquad (10.61)$$



- **Quantification des nombres d'onde :**

$$k_{mn} = \frac{x_{mn}}{r} \tag{10.62}$$

- **Fonction d'onde :** $\psi_m(\rho,\varphi) \equiv \psi_{mn}(\rho,\varphi)$ dans (10.58) où $k \equiv k_{mn}$

$$\psi_{mn}(\rho,\varphi) = a_m\, J_m(k_{mn}\,\rho)\, e^{\,im\varphi} \tag{10.63}$$

- **Niveaux d'énergie :** (10.56) et (10.62)

$$E_{mn} = \frac{\hbar^2 k_{mn}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 x_{mn}^2}{2mr^2} \tag{10.64}$$

- **Equation d'onde :** déformation verticale d'une membrane circulaire

$$\nabla^2 z(\rho,\varphi,t) - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{10.65}$$

- **Equation d'onde :** coordonnées polaires : vitesse du son c_s (10.66)

$$\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z(\rho,\varphi,t)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 z(\rho,\varphi,t)}{\partial t^2} = 0$$

- **Séparation des variables :**

$$z(\rho,\varphi,t) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)\,T(t) \tag{10.67}$$

- **Equation d'onde :** (10.67) dans (10.66) divisée par $z(\rho,\varphi,t)$

$$\frac{1}{R(\rho)}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}$$

$$-\frac{1}{c_s^2}\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = 0 \tag{10.68}$$

- **Système d'équations différentielles :** nombre d'onde k

$R(\rho) \equiv R_m(\rho)$ et $\Phi(\varphi) \equiv \Phi_m(\varphi)$ où $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\, c_s^2\, k^2 = \text{cste} \tag{10.69}$$

$$\frac{1}{\Phi_m(\varphi)} \frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} = -\, m^2 = \text{cste} \tag{10.70}$$

$$\frac{1}{R_m(\rho)} \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{1}{R_m(\rho)} \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} = \frac{m^2}{\rho^2} - \, k^2 = \text{cste} \tag{10.71}$$

- **Système d'équations différentielles :** remis en forme

$$\rho^2 \frac{d^2 R_m(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR_m(\rho)}{d\rho} + \left(k^2 \rho^2 - \, m^2\right) R_m(\rho) = 0 \tag{10.72}$$

$$\frac{d^2 \Phi_m(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\, \Phi_m(\varphi) = 0 \tag{10.73}$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c_s^2\, k^2\, T(t) = 0 \tag{10.74}$$

- **Fonctions propres de déformation verticale :** $z(\rho,\varphi,t) \equiv z_m(\rho,\varphi,t)$

$$z_m(\rho,\varphi,t) = R_m(\rho)\,\Phi_m(\varphi)\,T(t) \tag{10.75}$$

- **Condition au bord :** membrane circulaire de rayon $\rho = r$

$$z_m(r,\varphi,t) = 0 \tag{10.76}$$

- **Modes de déformation :** analogie : particule confinée sur un disque

$$z_{mn}(\rho,\varphi,t) = a_m\,J_m(k_{mn}\,\rho)\,e^{\,im\varphi} \qquad \text{où} \qquad k \equiv k_{mn} \tag{10.77}$$

- **Relation de dispersion :** quantifiée

$$\omega_{mn} = c_s\,k_{mn} \tag{10.78}$$

- **Evolution temporelle:** solution de l'équation différentielle (10.74)

$$T(t) = b^-\,e^{-\,i\,\omega_{mn}\,t} + b^+\,e^{\,i\,\omega_{mn}\,t} \tag{10.79}$$

- **Modes de déformation verticale :** (10.76) et (10.78) dans (10.67)

$$\begin{aligned} z_{mn}(\rho,\varphi,t) = {} & b^-\,a_m\,J_m(k_{mn}\,\rho)\,e^{\,i(m\varphi-\,\omega_{mn}\,t)} \\ & + b^+\,a_m\,J_m(k_{mn}\,\rho)\,e^{\,i(m\varphi+\omega_{mn}\,t)} \end{aligned} \tag{10.80}$$

- **Modes de déformation verticale réels :**

$$z_{mn}(\rho,\varphi,t) = \Big(A_m^- \cos(m\varphi - \omega_{mn}\,t) + B_m^- \sin(m\varphi - \omega_{mn}\,t)$$

$$+ A_m^+ \cos(m\varphi + \omega_{mn}\,t) + B_m^+ \sin(m\varphi + \omega_{mn}\,t)\Big) J_m(k_{mn}\,\rho) \qquad (10.81)$$

- **Modes stationnaires :**

$$A_m = \frac{1}{2}\,A_m^- = \frac{1}{2}\,A_m^+ \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{2}\,B_m^- = \frac{1}{2}\,B_m^+ \qquad (10.82)$$

- **Formules de trigonométrie** : $a = m\varphi$ et $b = \omega_{mn}\,t$

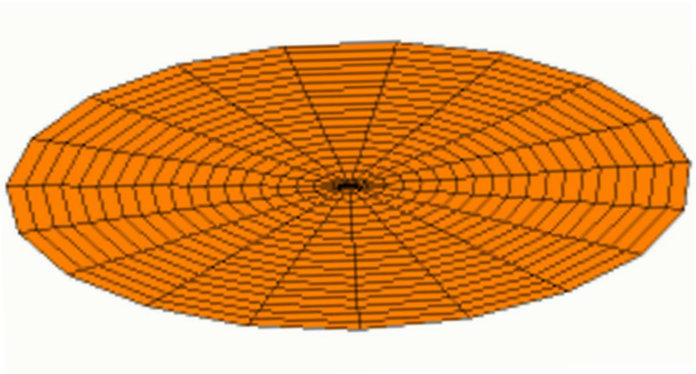
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

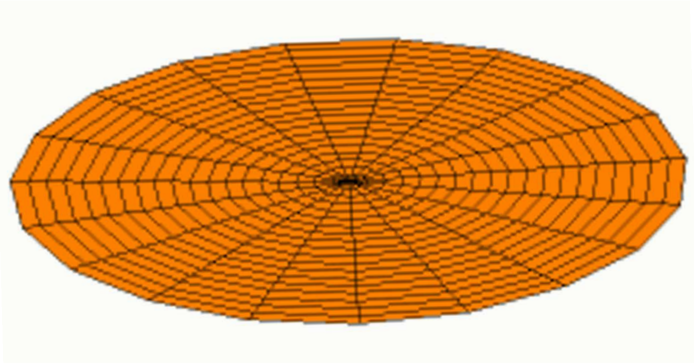
$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b) \qquad (10.83)$$

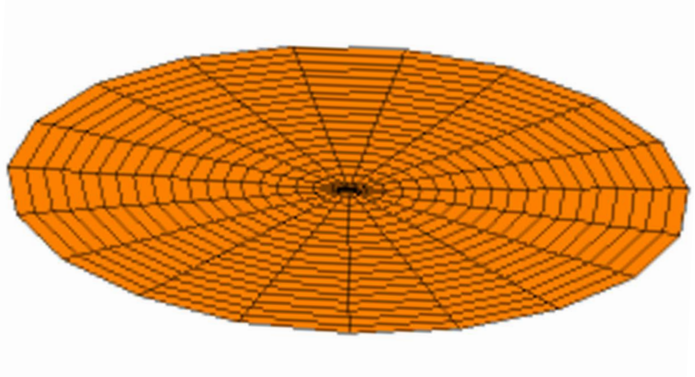
- **Modes stationnaires de déformation verticale :**

$$\boxed{z_{mn}(\rho,\varphi,t) = \Big(A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi)\Big) J_m(k_{mn}\,\rho) \qquad (10.84)}$$

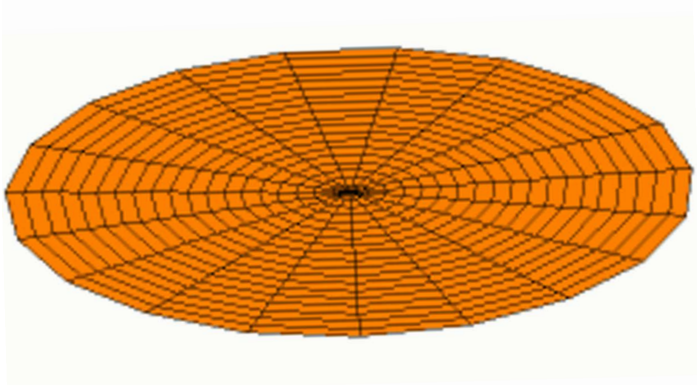
- **Déformation verticale :** modes : $z_{01}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{02}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{03}\left(\rho,\varphi,t\right)$

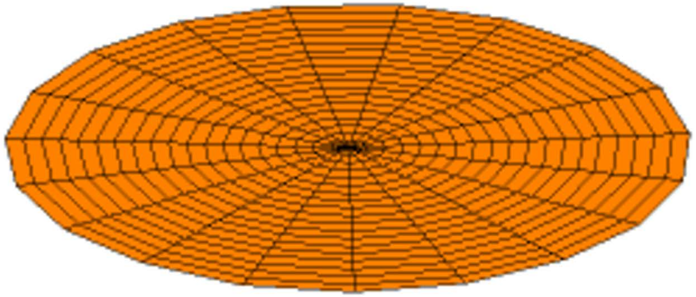


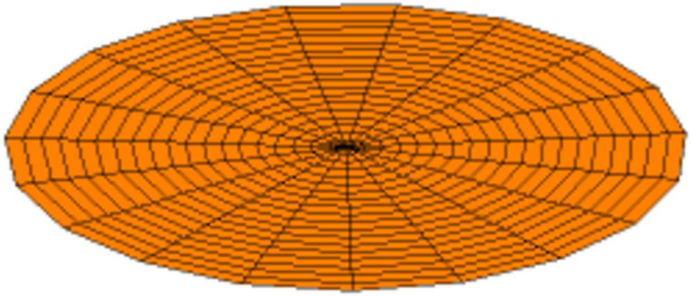




- **Déformation verticale :** modes : $z_{11}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{12}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{13}\left(\rho,\varphi,t\right)$







- **Déformation verticale :** modes : $z_{21}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{22}\left(\rho,\varphi,t\right)$ $z_{23}\left(\rho,\varphi,t\right)$